

# 疑似対数線型モデルにおける同等なモデル

鹿又伸夫

L. A. Goodman の準完全移動モデルと R. M. Hauser のモデルは、疑似対数線型モデルとして包括できる。これらの疑似対数線型モデルは、通常対数線型モデルと同じように適合度（尤度比）とモデルの単純性（自由度）を統計的基準として、分析される個別の各モデルが比較される。つまり、観測データに良く適合し、かつより単純なモデルが選択される。しかし、疑似対数線型モデルでは、相互に同じ期待度数をもちながら、異なるパラメータから構成される同等なモデルがありえる場合がある。同等なモデルの場合、検定統計量が同値となるためにモデル間の相互比較ができない。本稿では、こうした同等なモデルの問題点を指摘し、その対処策を検討する。

## はじめに

R. M. Hauser らのウィスコンシン大学の研究者がアメリカにおける社会移動の趨勢分析に「対数線型モデル (log-linear model)」を用いた研究 (Hauser et al., 1975a, 1975b) を発表して以来、社会移動研究において、このモデルの応用が著しく進展した。さらに Hauser (1978, 1980, 1981) は、Goodman の準完全移動モデル (quasi-perfect model) を発展させ、2次元分割表の独立性モデル (independence model) と飽和モデル (saturated model) の間の中間的な複数のモデルの中から、観測データに適合するモデルを選択できる方法を提示した。Hauser のモデルは Hauser タイプ・モデルとも呼ばれ、従来は結合指数、強制移動指数、開放性係数のような記述的統計量に依存していた移動表分析を、より分析的にした点において評価される。

Goodman の準完全移動モデルは、表内に観測度数 0 が含まれる「不完備表 (incomplete table)」分析を応用したもので<sup>1)</sup>、主対角線上のセルを 0 にし (彼の用語では “blank out”), それ以外のセルに独立性のモデルを適合させる

ものである。また、Hauser は自分のモデルを ECTA を用いながら、2次元表のデータを交互作用レベルごとの構造的ゼロ (structural zero) を含んだ下位表に分割し、3次元の相互独立性モデルに適合させ期待度数推定を行なっている (Hauser, 1980: 417-419)。このように両モデルとも不完備表の分析手法を応用・発展させてモデルを構築しており、通常対数線型モデルに対して「疑似対数線型モデル (quasi-log-linear model)」と位置づけることができる<sup>2)</sup>。

しかし、これらの疑似対数線型モデルでは同じ期待度数を推定する複数の同等なモデルがありえるため、その非決定性が問題となる。本稿は疑似対数線型モデルの同等なモデルについて詳述し、その問題点を提示することを意図している。こうした諸モデルが社会移動研究から発展してきたことから、本稿では移動表分析への応用を念頭において論を進めるが、他の分割表においても適用される<sup>3)</sup>。

第1節 Hauser タイプ・モデルと準完全移動の拡張モデル

移動表の観測度数を  $n_{ij}$ , 期待度数を  $F_{ij}$  で表記し,  $i$  は行変数  $A$  の,  $j$  は列変数  $B$  のカテゴリー値とする ( $i=1, 2, \dots, I; j=1, 2, \dots, J$ )。このとき Hauser タイプ・モデルは次式のようなになる。

$$\log F_{ij} = u + u_{A(i)} + u_{B(j)} + u_{C(k)} \dots\dots\dots(1)$$

$u$  は総平均効果,  $u_{A(i)}$  は行変数  $A$  の行  $i$  の効果,  $u_{B(j)}$  は列変数  $B$  の列  $j$  の効果のパラメータである。 $u_{C(k)}$  は変数間の交互作用効果をレベルとして表わしてあり, 総数  $K$  個ある交互作用効果レベル・パラメータ ( $k=1, 2, \dots, K$ ) の第  $k$  レベルの下位集合に含まれているセル ( $i, j$ )  $\in H_k$  についての交互作用を  $u_{AB(ij)}$  と表わすと,  $u_{AB(ij)} = u_{C(k)}$  となり下位集合内では等しくなる。このモデルの正規化 (normalization) は,

$$\sum_i u_{A(i)} = \sum_j u_{B(j)} = \sum_i \sum_j u_{AB(ij)} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$u = (\sum_i \sum_j \log F_{ij}) / IJ \dots\dots\dots(3)$$

となる。 $u$  は対数変換された  $IJ$  個の期待度数の総平均 (grand mean) である。Hauser タイプ・モデルは乗型モデルとしても表わされ,  $u = \log \mu$ ,  $u_{A(i)} = \log \alpha_i$ ,  $u_{B(j)} = \log \beta_j$ ,  $u_{C(k)} = \log \tau_k$  となり, (1)(2)式は次のように書き換えられる。

$$F_{ij} = \mu \alpha_i \beta_j \tau_k \dots\dots\dots(1)'$$

$$\prod_i \alpha_i = \prod_j \beta_j = \prod_k \tau_k^k = 1 \dots\dots\dots(2)'$$

ただし, 加法式と同じように  $k$  レベルに含まれるセル ( $i, j$ )  $\in H_k$  の交互作用は  $r_{ij} = r_k$  で, その同レベル内の個数は  $n_k$  となる。

この Hauser タイプ・モデル (以後は HT モデルと略記する) と同等なモデル (equivalent model) を L. A. Goodman の準完全移動モデルを拡張することで導出できる。本稿で扱う同等なモデルとは, モデル間でパラメータ推定値に差異があるが, すべてのセルについて同じ期待度数を推定するような複数のモデルをいう。

Goodman (1961, 1965, 1969a, 1969b) の提唱した代表的モデルである準完全移動モデルは, 主対角線上のセル以外で統計的独立性が満たされるモデルであり, 以下に示される。

$$\log F_{ij} = u + u_{A(i)} + u_{B(j)} + u_{AB(ij)}$$

ただし,  $i=j$  のとき  $u_{AB(ij)}$  に制限はないが,

$$i \neq j \text{ のセルは } u_{AB(ij)} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

このモデルの正規化は次式で示され, (2)式中の  $\sum_i \sum_j u_{AB(ij)} = 0$ , (3)式が欠落しているのに注意されたい。

$$\sum_i u_{A(i)} = \sum_j u_{B(j)} = 0 \dots\dots\dots(5)$$

通常対数線型モデルの飽和モデルにおける交互作用パラメータ  $u_{AB(ij)}$  の正規化が

$$\sum_i u_{AB(ij)} = \sum_j u_{AB(ij)} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

であり, 独立性モデルでは,

$$\text{すべての } i, j \text{ について } u_{AB(ij)} = 0 \dots\dots\dots(7)$$

なので準完全移動モデルも HT モデルも, 独立性モデルと飽和モデルの中間的制約が加えられている。独立性モデルと比較すると, 準完全移動モデルは交互作用が 0 であるという「制約 (constraint)」が主対角線上のセルについてだけ取り除かれている。他方, HT モデルはすべてのセルでこの 0 制約が除去され, 代わりに交互作用パラメータの総和が 0 となる制約が課されているが, 交互作用の行和と列和が 0 となる制約までは加えられていない。

さて, 準完全移動モデルを拡張して HT モデルと同等なモデルを導いてみよう。図 1 (a) は, 準完全移動モデルを 1975 年 SSM (Social Stratification and Mobility) 調査の移動表にあてはめた場合の交互作用パラメータ  $u_{AB(ij)}$  を 8 水準の交互作用レベルとみなして, そのレベルを図示化したデザイン・マトリックスである。使用されている職業階層分類は, 以下の通りである。

┌ 1 = 専門的職業      5 = 熟練的職業

図1；準完全移動モデルと制約された準完全移動モデルの交互作用パラメータ  $u_{c(k)}$  のデザイン・マトリックス

(a) 準完全移動モデル									(b) 制約された準完全移動モデル								
子職	1	2	3	4	5	6	7	8	子職	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1								1	1							
父 2		2							父 2		1						
親 3			3						親 3			1					
の 4				4					の 4				1				
職 5					5				職 5					1			
業 6						6			業 6						1		
7							7		7							1	
8								8	8								1

(表記されているのは、 $u_{c(k)}$  の  $k$  で空白のセルは  $u_{AB(ij)} = 0$  を意味している。)

図2：小島モデルの交互作用パラメータ  $u_{c(k)}$  のデザイン・マトリックス

(a) HTモデル									(b) 拡張モデル								
子職	1	2	3	4	5	6	7	8	子職	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	3	4	5	7	6	7	6	1	1	3	4	5	7		7	
父 2	4	2	4	5	6	6	6	6	父 2	4	2	4	5				
親 3	4	4	4	4	6	6	6	6	親 3	4	4	4	4				
の 4	5	5	5	3	6	6	6	6	の 4	5	5	5	3				
職 5	6	6	6	6	5	7	6	6	職 5					5	7		
業 6	6	6	6	6	6	6	7	6	業 6							7	
7	7	7	7	7	6	6	6	7	7	7	7	7	7				7
8	6	6	6	6	6	6	6	2	8								2

表1：小島モデルの期待度数と統計量

子職	1.専門	2.管理	3.事務	4.販売	5.熟練	6.半熟	7非熟	8.農業
1	44.00	18.01	24.59	10.06	6.34	10.59	1.78	2.63
2	16.54	49.72	43.76	17.91	19.18	18.84	5.37	4.69
3	17.50	25.95	46.32	33.34	20.30	19.94	5.69	4.96
4	17.57	26.05	46.50	76.99	35.85	35.22	10.04	8.77
5	15.92	23.61	42.14	30.34	127.90	37.27	18.06	15.76
6	8.56	12.68	22.64	16.30	34.63	34.02	5.71	8.47
7	3.48	5.15	9.20	6.62	23.91	23.49	6.70	3.44
8	46.43	68.83	122.85	88.44	187.91	184.62	52.65	325.28

自由度d.f.=43 , 尤度比  $L^2 = 20.97$  , 非類似指数  $\Delta = .030$

表2：小島モデルのパラメータ推定値

(a) HTモデル

$u = 3.000$

	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_{A(i)}$	-1.128	-.552	-.495	.074	.660	.039	-.331	1.730
$u_{B(j)}$	-.613	-.220	.360	.031	.784	.767	-.488	-.623
$u_{C(k)}$	2.525	1.678	1.239	.971	.406	-.279	-.809	—

(b) 拡張モデル

$u = 2.720$

	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_{A(i)}$	-1.128	-.551	-.495	.074	.661	.040	-.331	1.731
$u_{B(j)}$	-.613	-.219	.360	.031	.785	.767	-.488	-.623
$u_{C(k)}$	2.804	1.957	1.518	1.250	.685	.000	-.530	—

- |           |            |
|-----------|------------|
| 2 = 管理的職業 | 6 = 半熟練的職業 |
| 3 = 事務的職業 | 7 = 非熟練的職業 |
| 4 = 販売的職業 | 8 = 農林的職業  |

各レベル値はカテゴリカルなもので交互作用の大きさは考慮していない。もちろん、パラメータ推定値から分析後に順序づけることができる。

図1(b)は、この準完全移動モデルに(8)式の制約を課した、制約された準完全移動モデル (constrained quasi-perfect model) である。このモデルでは、次式のように主体角線上の交互作用の大きさが等しいという仮定が導入されている。

$$\text{すべての } i=j \text{ について } u_{AB(ij)} = u_{C(i)} \cdots (8)$$

図2(a)は小島(1983)が提示した、1975年SM調査の世代間移動表(富永編, 1979: 53, 表2.9c)に対するHTモデルのデザイン・マトリックスである。このデザイン・マトリックスは同じレベルに配置されたセルの交互作用が等しいというモデルの仮定を図示化するもので、地位達成分析のパス・ダイアグラムに匹敵するモデル明示化の手段である。

図2(b)は、制約された準完全移動モデルを拡張したモデル(以後は拡張モデルと略記する)のデザイン・マトリックスである。このモデルは、小島のHTモデルと同じ期待度数を推定する同等なモデルで、筆者が作成した拡張モデルである。前述した交互作用の制約を複数個設定し、(a)図のレベル6にあたる空白のセルは  $u_{AB(ij)} = 0$  が仮定されている。レベル7は本来ならば、レベル値を繰りあげてレベル6と表記できるが、ここでは両図の対照を見やすくするためにレベル6を  $u_{C(6)} = 0$  として空白にして示した。表1と表2には両モデルで推定される期待度数、統計量、パラメータ推定値を記してある。期待度数は両モデルから同じ推定値を得られ、そのため統計量も一致した<sup>4)</sup>。しかし、パラメータは  $u$  と  $u_{C(k)}$  において大きな違いが

生じている。このように、両モデルは同じ期待度数を出現させながら、異なるパラメータ値から構成される同等なモデルである。両モデルの相違はパラメータの正規化にある。HTモデルと拡張モデルの  $u$  の差  $3.000 - 2.720 = .280$  を、拡張モデルの  $u$  に加え、 $u_{C(k)}$  から減ざるとHTモデルとはほぼ等しくなる。例えば、レベル1では  $2.804 - .280 = 2.524$  となる<sup>5)</sup>。

## 第2節 パラメータ推定法とオッズ比の構造

次にパラメータ推定法を説明しながら、両モデルのパラメータの持つ構造を検討しよう。HTモデルのパラメータ推定は複雑であり、Hauser(1978: 950, note. 2, 1980: 418)自身もダミー変数を用いた重回帰分析を行ない、ついで総平均からの偏差から再正規化する手順を踏んでいる。表3は筆者が考案した推定法のためのデータ配列である。対数化された期待度数を従属変数とし、各セルに該当するパラメータをダミー化してある。さらに、最下部の4行はモデルの正規化を表わしている。下から4行めから、総平均効果、行効果総和 = 0、列効果総和 = 0、交互作用総和 = 0 が順にデータ化されている。このデータ配列で重回帰分析することで表2(a)の推定値が直接得られた。ただし、この推定法は計算を簡略にする便宜的方法である。重回帰分析によってパラメータを直接に推定する方法の詳細については、吉田(1980)、Reynolds(1977: 180-213)を参照されたい。

パラメータ推定は手計算でも可能な場合があり、拡張モデルの例から示そう。推定にはオッズ比が利用される。オッズ比は、ここでは期待度数について、

$$\Omega_{ij} = F_{ij} \cdot F_{i+1, j+1} / (F_{i+1, j} \cdot F_{i, j+1}) \cdots \cdots (9)$$

とする\*(他の計算法もある)。ここで(1)'式の乗型モデルで(9)式の期待度数を表わし、セル(i, j)

表3：HTモデルのパラメータ推定のためのデータ配列

(小島モデルの例)

log F <sub>ij</sub>	u	u <sub>A(i)</sub>								u <sub>B(j)</sub>								u <sub>C(k)</sub>									
		1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7			
log F <sub>11</sub>	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0			
log F <sub>12</sub>	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		
log F <sub>13</sub>	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0		
log F <sub>14</sub>	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		
log F <sub>15</sub>	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		
log F <sub>16</sub>	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0		
log F <sub>17</sub>	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0		
log F <sub>18</sub>	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0		
log F <sub>21</sub>	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
log F <sub>22</sub>	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
log F <sub>23</sub>	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
log F <sub>24</sub>	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
log F <sub>25</sub>	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
log F <sub>26</sub>	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
log F <sub>27</sub>	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
log F <sub>28</sub>	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
⋮	⋮																										
log F <sub>86</sub>	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
log F <sub>87</sub>	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
log F <sub>88</sub>	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
u	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
log 10 <sup>-5</sup>	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
log 10 <sup>-5</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	
log 10 <sup>-5</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	7	6	37	9

の交互作用  $r_k = r_{ij}$  から、

$$\Omega_{ij} = r_{ij} \cdot r_{i+1, j+1} / (r_{i+1, j} \cdot r_{i, j+1}) \dots\dots(10)$$

となるので、各組合せのオッズ比の中で直接にパラメータ値が計算できる場合がある。

図2(b)のデザイン・マトリックスと表1の期待度数を対照させて計算した、期待度数についてのオッズ比を利用するのである。例えば、 $\Omega_{66} = 1/r_7 = 34.02 \times 6.70 / (23.49 \times 5.71) = 1.699$  なので、この逆数を取り対数化すると  $u_{C(7)} =$

$-0.530$  となる。また、 $\Omega_{55} = r_5/r_7 = 127.90 \times 34.02 / (34.63 \times 37.27) = 3.371$  なので、この対数値に  $u_{C(7)}$  を加え  $u_{C(5)} = (\log 3.371) - 0.530 = 0.685$  となる。このようにオッズ比を利用して計算を順次繰り返し、各  $u_{C(k)}$  を求める<sup>6)</sup>。

$u_{C(k)}$  が得られたら、その交互作用効果を除去した部分的期待度数 ( $F_{ij}^*$ ) を対数化した  $\log F_{ij}^* = u + u_{A(i)} + u_{B(j)}$  のデータを作成し、これを独立性モデルに適合させてパラメータを推定する。

図3：小島モデルの期待度数のオッズ比の構造

$$\Omega_{ij} = F_{ij} \cdot F_{i+1, j+1} / (F_{i+1, j} \cdot F_{i, j+1})$$

i : i+1	j : j+1						
	1:2	2:3	3:4	4:5	5:6	6:7	7:8
1:2	a	b		c	c'	c	c'
2:3	d	d'	e	e'			
3:4			f	ef'			
4:5			f'	g	hc'	c	
5:6				h	c/h	c' <sup>2</sup>	c
6:7				c		c	c' <sup>2</sup>
7:8				c'			fc/b/h

※ 空白のセルは  $\Omega_{ij} = 1$  を示している。

※ 各アルファベットはオッズ比間の関係を表わし、両モデルの乗型パラメータによって次のように分解される。

(a) HT タイプ

$$\begin{aligned} a &= r_1 \times r_2 / r_3 / r_4 \\ b &= r_3 / r_2 \\ c &= r_6 / r_7, \quad c' = 1/c \\ d &= r_4 / r_2, \quad d' = 1/d \\ e &= r_4 / r_5, \quad e' = 1/e \\ f &= r_3 / r_5, \quad f' = 1/f \\ g &= r_3 \times r_5 / (r_6)^2 \\ h &= r_6 / r_5 \end{aligned}$$

(b) 拡張モデル

$$\begin{aligned} a &= r_1 \times r_2 / r_3 / r_4 \\ b &= r_3 / r_2 \\ c &= 1/r_7, \quad c' = 1/c \\ d &= r_4 / r_2, \quad d' = 1/d \\ e &= r_4 / r_5, \quad e' = 1/e \\ f &= r_3 / r_5, \quad f' = 1/f \\ g &= r_3 \times r_5 \\ h &= 1/r_5 \end{aligned}$$

$F_{ij}^*$  は独立性モデルに完全に適合する。例えば、セル(1, 2)はレベル3なので  $\log F_{12}^* = (\log 18.01) - 1.518 = 1.373$ ,  $F_{12}^* = 3.947$  とし、他のセルについても同様に求める。この  $F_{ij}^*$  の独立性モデルのパラメータが表2(b)の  $u, u_{A(i)}, u_{B(j)}$  の欄に記載されている。さらに HT モデルのパラメータが得たいなら、交互作用効果を減じる以前の  $F_{ij}$  の幾何平均を対数化したものから、 $F_{ij}^*$  で求めた  $u$  を差し引いた値 .280 を、拡張モデルの  $u_{C(k)}$  から減ずれば良い。両モデルは同等なモデルなので、HT モデルのパラメータを得たいとき、拡張モデルとして度数推定をした後で HT モデルのパラメータ推定をする手順を踏んでも良い。

以上から、各セルに恣意的に与えられ、重みづけられた交互作用効果を除去した部分的期待度数  $F_{ij}^*$  には統計的独立性が成立することがわかる。つまり、両モデルは交互作用効果を2つの異なる基準——HT モデルは総幾何平均の対数と交互作用効果総和 = 0、拡張モデルは部分的期待度数幾何平均の対数と交互作用のないセルの存在——に従って重みづけをし、部分的期待度数に加算しているモデルといえよう。

図3は、オッズ比を構成する交互作用パラメータ値は異なるが、両モデルに共通するオッズ比の構造を示したものである。期待度数が同値なので同じ組合せのオッズ比の計算値が等しく、オッズ比間の関係の構造も同一となるが、オッズ比の中で両モデルで異なるパラメータから構成されているものがいくつかある。逆に、複数の別個なモデルが同じオッズ比の構造を持った場合も同等なモデルとなる。このことは、同一の正規化の基準を持つ同じタイプの個々のモデル間についてもいえるが、これについては後に論ずることとする。

### 第3節 同等なモデルの問題点

同等な両モデルが提起するのは、両者の異なるパラメータが、異なる理論的解釈を導きかねないことである。

これを例示する問題は、表4(a), (b)の新移動指数の値の相違である。Hauser (1978: 936-941, 1980: 426-430) の提唱した新移動指数 ( $R_{ij}^*$ ) は、

$\log e_{ij} = \log (n_{ij} / F_{ij}) = \log n_{ij} - \log F_{ij}$   
を残差とすると、

$$\log R_{ij}^* = u_{C(k)} + \log e_{ij}, \text{ または}$$

$$R_{ij}^* = r_k \cdot e_{ij} \dots\dots\dots(11)$$

である。これと、Goodman (1969a, 1969b) が「非移動指数 (index of immobility)」と呼んだものは同様に、前述した部分的期待度数と観測度数の比として次式のように表わせる。

$$R_{ij}^* = n_{ij} / F_{ij}^* = n_{ij} / \exp[u + u_{A(i)} + u_{B(j)}] \dots\dots(12)$$

指数自体の数値の大きさにのみ注目すれば、異なる解釈がされる危険がある。ここで、部分的期待度数が測定効果 (サンプル数の効果) と周辺分布の恒常性・変動効果から構成されていて、階層構造に影響されない機会均等状態を表わすと考えてみよう。すると、例えば、 $R_{11}^*$  は(a)表では部分的期待度数の機会均等状態に比して12.49倍もの非移動・職業継承がみられるが、(b)表ではこれが16.51倍である。また、 $R_{65}^*, R_{75}^*$  は拡張モデルでは1.04と1.09で1に近似しており、半熟練・非熟練から熟練的職業への世代間移動が  $F_{ij}^*$  の機会均等状態にほぼ近いのに対して、HT モデルでは .79と .82で移動が低レベルである。全体的にみると、HT モデルではノンマニュアル内のコーナー (父職、子職ともに専門から販売までのノンマニュアルの層) に継承・移動機会が集中し、他のセルでは1以下のセルが多く移動が阻まれているような印象を与える。他方、拡張モデルではノンマニュアル内



の継承・移動機会が極度に集中しているが、他のセルでは1に近い数値が多く機会均等が達成されているかのように見える。このように、新移動指数の数値のみに着目すると、両モデルは異なった結論を導いてしまう。

しかし、各表内での新移動指数の比の関係は

両表で同じで、例えば、 $R_{11}^*/R_{12}^* \approx 3.62$ ,  $R_{12}^*/R_{13}^* \approx 1.15$  で(a), (b)表ともこれに近似する。新移動指数のセル間の比の関係は両モデル間で同じであり、この相対的関係の理論的含意に差異は生じない。が、前述の例のように、部分的期待度数に対するレベル・パラメータの理論的含

表4：小島モデルのHTモデルと拡張モデルによる  
新移動指数 ( $R_{ij}^*$ )

(a) HTモデルの新移動指数

子職	1.専門	2.管理	3.事務	4.販売	5.熟練	6.半熟	7.非熟	8.農業	
1	12.49	3.45	3.01	1.19	.42	.57	.25	1.44	
2	2.39	5.39	2.72	1.68	.71	.68	.56	1.13	
父 親 の 職 業	3	2.72	2.54	2.68	2.38	.89	.68	.66	1.07
4	1.37	1.56	1.71	3.45	.84	.62	.68	.52	
5	.85	.80	.75	.77	1.43	.51	.71	.62	
6	1.06	.89	.70	.70	.79	.73	.23	.71	
7	.38	.43	.39	.47	.82	.68	1.02	.39	
8	.72	.71	.70	.79	.74	.80	.83	5.35	

(b) 拡張モデルの新移動指数

子職	1.専門	2.管理	3.事務	4.販売	5.熟練	6.半熟	7.非熟	8.農業	
1	16.51	4.56	3.97	1.58	.56	.76	.33	1.90	
2	3.16	7.12	3.59	2.21	.94	.90	.74	1.49	
父 親 の 職 業	3	3.59	3.36	3.54	3.14	1.18	.90	.88	1.41
4	1.81	2.06	2.26	4.56	1.12	.82	.90	.68	
5	1.13	1.06	1.00	1.02	1.89	.70	.94	.82	
6	1.40	1.18	.93	.92	1.04	.97	.31	.94	
7	.51	.57	.51	.62	1.09	.89	1.34	.51	
8	.95	.94	.93	1.04	.98	1.06	1.10	7.07	

図4：OCG II (1973)データについて同じ期待度数をもたらすモデルの交互作用パラメータ ( $u_{c(k)}$ ) のデザイン・マトリックス

(a) Featherman and Hauser (1978, pp.150-159)

初職	1	2	3	4	5
父 1	2	4	5	5	5
親 2	3	4	5	5	5
の 3	5	5	5	5	5
職 4	5	5	5	4	4
業 5	5	5	5	4	1

(b) Pontinen(1981)の P 1 モデル

初職	1	2	3	4	5
父 1	2	4	4	5	5
親 2	3	4	4	5	5
の 3	5	5	4	5	5
職 4	5	5	4	4	4
業 5	5	5	4	4	1

(c) Pontinen(1981)の P 2 モデル

初職	1	2	3	4	5
父 1	2	4	5	5	5
親 2	3	4	5	5	5
の 3	4	4	4	4	4
職 4	5	5	5	4	4
業 5	5	5	5	4	1

(d) Macdonald(1981)のモデル

初職	1	2	3	4	5
父 1	2	2	2	3	3
親 2	4	2	2	3	3
の 3	5	3	2	3	3
職 4	5	3	2	2	2
業 5	5	3	2	2	1

(e) 各モデルのオッズ比 ( $Q_{ij}$ ) の構造

	1:2	2:3	3:4	4:5
1:2	a			
2:3	b	c		
3:4			c	
4:5				d

- 1=Upper nonmanual
- 2=Lower nonmanual
- 3=Upper manual
- 4=Lower manual
- 5=Farm

意は両モデルで異なってしまうので、どちらのモデルに依拠すべきかを検討しなければならない。

ここまではHTモデルと拡張モデルを、同じデザイン・マトリックスを持つ同等なモデルとして表わせることによって生じてくる問題を説明してきた<sup>7)</sup>。次に取りあげるのは、同じ正規化の基準に従う同種のモデルであり、相互に異なるデザイン・マトリックスとパラメータを持ちながら、各セルの期待度数が相互に等しくなるような同等なモデルの問題である。ここではHTモデルでのそうした例を検討する。

Featherman and Hauser (1978: 150-159) は、5分類の父職と子の初職の移動表について図4(a)のモデルを提示した。Macdonald(1981)はこれに対して(d)のモデルも同じ期待度数をもたらすことを指摘した。さらにHout(1983: 46-51)はMacdonaldのモデルに加え、Pontinen(1981)の2つのモデル、P1モデル(b)とP2モデル(c)も同様にFeatherman and Hauserのモデルと同等であることを紹介している。4つのモデルはすべて自由度=12、尤度比=66.57、非類似指数=.018となる。

Macdonaldはこうした同等な諸モデルのオッズ比の構造を検討することの重要性を強調した。図3のように図4(a)~(d)の各モデルのオッズ比の構造を表わすと図4(e)となる。つまり、(a)から(d)までは(e)に示される構造を持ち、こうした場合の期待度数と自由度は等しくなるので適合度とモデルの単純性を基準にモデル選択ができない。Houtはこうした同等な諸モデルの問題を「非決定性(indeterminacy)」（もしくは非決定的な結果）の問題と呼んでいる<sup>8)</sup>。

またHope(1981: 553)はHauserの新移動指数が選択されるモデルによって変化するので、指数の解釈が独断的になる可能性を示唆した。

Hopeの批判は、Hauser(1981: 580)に反論されたように飽和モデルのパラメータ推定法を例にした点でイレリバントな批判であった。しかし、同等なモデル間でパラメータや新移動指数に一致しないものがでてくる<sup>9)</sup>。この新移動指数の持つモデル依存的性質は、同等なモデルの非決定性によって起こり、分析結果の解釈に直接影響する。

#### 第4節 同等なモデルへの対処策

本稿で提起された疑似対数線型モデルの同等なモデルの問題には、以下の2つの場合があった。

1. HTモデルと拡張モデルとは同等なモデルとなるので、どちらのモデルに依拠してデータを解析すべきかが問題となる。
2. 上の一方の（つまり同種の正規化の基準に従う）モデルとして分析することを選んだとしても、複数の同等なモデルがありえる場合がある。その場合、適合度とモデルの単純性という通常の基準ではどのモデルを採用するか判断できず、非決定性が問題となる。

どちらの問題も、同等なモデルが異なるパラメータ推定値をもたらす、異なる理論的解釈を導いてしまう。

第1の問題は、モデルの種類の選択の問題といえ、両モデルのどちらのパラメータ正規化の基準を採用するかという問題である。この問題への対処は、両モデルのパラメータの制約、正規化が、分析の際に依拠する理論的概念をいかに特定化(specification)しているか、または、どのような理論的概念を特定化するか、を検討することである。

移動研究を例に具体的にいえば、移動表分析が伝統的に準拠してきた「構造移動と純粹移

動」,「完全移動または機会均等」等の理論的概念を両モデルのパラメータが特定化しているのか,または他の代替的概念を特定化しているのか,を検討することである。そして,これらの概念をより特定化しうるほうのモデルを選べば良いわけである。

第2の非決定的な同等なモデルの問題には,疑似対数線型モデルにおけるモデル選択一般の問題として対処することができる。観測データに適合するモデルが唯一である保証はなく,複数の適合的モデルが併存すると考えるほうが妥当である。疑似対数線型モデル応用においては,同等なモデルの非決定性ととも,同等なモデルではないが同程度の適合度を持つ複数のモデル間選択の問題も検討しなければならない。両者の問題は適合的モデル選択の問題として包括できる。同等なモデルは,複数の適合的モデル存在の特殊な場合であるといえるからである。

最終的に採用するモデルを確証するためには,最終的モデルへ到達するまでのモデル選択過程が,その選択過程の各段階で得られた理論的含意が最終的モデルを保証するような分析枠組で整序づけられていなければならない。そのためには選択過程が,なんらかの理論的仮定を含んだいくつかの段階に分割されていて,各段階内でのモデルの比較から理論的含意がもたらされ,それから次の段階の分析に移行するように体系化されていなければならない。換言すれば,概念から構成される理論的仮定を結びつけてモデル探索の分析枠組を提示しなければならない。

再び移動研究を例にすれば,準完全移動モデル,コーナー・モデル(corner model),対角線モデル(diagonal model)<sup>10)</sup>等の諸モデルの理論的含意を考慮しながら,それらのモデルに理論的仮定に基づいた制約を加えたり緩めたりして,モデル探索の分析枠組を構築するのである。

このように,統計量ではない他の基準,つまり理論的基準からモデル選択の手続きと分析枠組を演繹的に提示することが,疑似対数線型モデル応用において不可欠であることが認識されなければならない<sup>11)</sup>。

#### <註>

- 1) 不完備表分析と準完全移動モデル(準独立性モデル)については, Everitt(1977: 訳書, 114-123), Fienberg(1980: 140-150), Haberman(1979: 444-486), Kennedy(1983: 223-224), Reynolds(1977: 18-24), Upton(1978: 訳書, 122-131)等を参照されたい。
- 2) 疑似対数線型モデルという用語を用いているのは, Fienberg(1980: 197), Kennedy(1983: 226)などである。
- 3) 本稿の分析は,筆者が作成したBASICで書かれたパーソナル・コンピュータ用のプログラム「PLM 2」(2次元分割表用)によって行なった。
- 4) 期待度数は小数点以下第3位で微小な誤差が生じた程度であった。また,尤度比はHTモデルで20.97, 拡張モデルで20.94になったが,検定結果に影響を及ぼすほどではない。
- 5)  $u_{A(i)}$ ,  $u_{B(j)}$  が両モデルで多少異なっているが,大きなものではなく,無視しうる誤差の範囲内である。
- 6) (9)式のオッズ比によって求められないときは,  $\Omega_{(ij, rc)} = E_{ij} \cdot E_{rc} / (E_{rj} \cdot E_{ic})$  として  $i \neq r, j \neq c$  の  $(ij, rc)$  の組合せを自由に選んで計算できる。
- 7) 図2(b)の空白のセルに  $u_{c(6)} = 0$  のレベル6を記入すれば,図2(a)とまったく一致することを意味している。
- 8) 「対数乗型モデル(log-multiplicative model)」も含めた同等な諸モデルの例が, Hauser

(1981:575, table. 1)とGrusky and Hauser (1984:27, table. 2)に紹介されているので、参照されたい。

9) この例として、Hout (1983:49, table. 15)が計算した図4の各モデルのパラメータの相違をみよ。

10) コーナー・モデルは移動表の主対角線上の両コーナーをblank outしたモデルで、対角線モデルは主対角線に平行に交互作用レベルを割りあてるモデルをいう。Hout (1983:23-25, 27-31)を参照されたい。

11) Hauser (1981:572, 576)も、モデルが期待値の集合からのみ構成されているとは考えない。モデルはそれとともに、我々が期待値を解釈し説明するために用いている構造とストーリーからも構成されていると考える。こうしてHauserは、Macdonaldの批判に対して、彼がモデル選択の基準に言及せずにオッズ比の有用性のみ着目していると反駁する。Hauser自身は、対称性モデルの理論的重要性を強調し、それを分析の基本モデルとしてデザイン・マトリックスを調整したのであった。

#### \*引用文献\*

- Everitt, B.S. 1977 The Analysis of Contingency Tables, Chapman and Hall Ltd. (山内光哉監訳, 弓野憲一・菱谷晋介訳『質的データの解析』新曜社, 1980年)
- Featherman, D.L. & Hauser, R.M. 1978 Opportunity and Change, Academic Press.
- Fienberg, S.E. 1980 The Analysis of Cross-Classified Categorical Data (2nd edition), MIT Press.
- Goodman, L.A. 1961 "Statistical methods for the mover-stayer model", Journal of the American Statistical Association, 56: 841-868.
- 1965 "On the statistical analysis of mobility tables", A.J.S., 70: 564-585.
- 1969a "How to ransack social mobility tables and other kinds of cross-classification tables", A.J.S., 75: 1-39.
- 1969b "On the measurement of social mobility: an index of status persistence", A.S.R., 34: 831-850.
- Grusky, D.B. & Hauser, R.M. 1984 "Comparative social mobility revisited: models of convergence and divergence in 16 countries", A.S.R. 49: 19-38.
- Haberman, S.J. 1978-79 Analysis of Qualitative Data, vol.1-2., Academic Press.
- Hauser, R.M. 1978 "A structural model of mobility table", Social Forces, 56-3: 919-953.
- 1980 "Some exploratory methods for modeling mobility tables

- and other cross-classified data", Sociological Methodology,  
Jossey-Bass: 413-458.
- 1981 "Hope for the mobility ratio", Social Forces, 60-2: 572-  
584.
- Hauser, R.M.; Koffel, J.N.; Travis, H.P. & Dickinson, P.J. 1975a  
"Temporal change in occupational mobility: evidence for men in  
the United States", A.S.R., 40: 279-297.
- Hauser, R.M.; Dickinson, P.J.; Travis, H.P. & Koffel, J.N. 1975b  
"Structural changes in occupational mobility among men in the  
United States", A.S.R., 40: 585-598.
- Hope, K. 1981 "The new mobility ratio", Social Forces, 60-2: 544-556.
- 1982 "Vertical and nonvertical class mobility in three count-  
ries", A.S.R., 47: 99-113.
- Hout, M. 1983 Mobility Tables, Sage Publications.
- Kennedy, J.J. 1983 Analyzing Qualitative Data, Praeger Publishers.
- 小島 秀夫 1983 「社会移動表分析の新方法——新結合指数による分析——」, 『社会学評論』 第33  
巻, 第4号(132), pp. 20-36.
- Macdonald, K.I. 1981 "On the formulation of a structural model of  
mobility table" Social Forces, 60-2: 557-571.
- Pontinen, S. 1981 "Models and social mobility research: a comparison  
of some log-linear models for a social mobility matrix",  
Department of Sociology, University of Helsinki. (mimeo.)
- Reynolds, H.T. 1977 The Analysis of Cross-Classifications, Free Press.
- 富永 健一 編 1979 『日本の階層構造』, 東京大学出版会。
- Upton, G.J.G. 1978 The Analysis of Cross-tabulated Data, John Wiley  
& Sons. (池田央・岡太彬訓訳『調査分類データの解析法』, 朝倉書店, 1980年)
- 吉田 光雄 1980 「対数線形モデルによる3次元分割表データの分析法」, 『大阪大学人間科学部紀  
要』 第6巻, pp. 101-142.

(かのまた のぶお)