非対称・N人「囚人のジレンマ」モデル

神山　英紀

この論文の目的は、利得関数が異なる成員からなる社会的ジレンマ状況を、N人非対称ゲームとしてモデル化して示し、N人囚人のジレンマ解消の可能性を考察することである。はじめに木村のモデルを取り上げ、モデルの予測力および前提について批判的に検討する。次に、プレイヤーの「名」を利得関数のパラメータとする新たなモデルを提示し、さらに、このモデルの帰結、すなわちN人非対称ゲームのナッシュ均衡を求めるための定理を利用し、実際に解を求める。新たに導かれる全員非協力とはならないナッシュ均衡は、全員協力の状態と比較してパレートの意味で無差別であり、また、全員非協力の場合と比較してパレート劣位になることはないことが分かる。

1. 問題の所在

1.1 ジレンマ「解消」の意味

2名のプレイヤーによる囚人のジレンマは、最もよく知られたゲームの類型であり、多数のプレイヤーからなる有限のN人囚人のジレンマもまた、社会学においてかなりの程度浸透している。この論文の目的は、利得関数が異なる成員からなる社会的ジレンマ状況を、N人非対称ゲームとしてモデル化して示し、これによりN人囚人のジレンマ解消の可能性を考察することである。

ここでいう「ジレンマ」とは、ナッシュ均衡がパレート効率的にはならないことを指す。つまり、理論的に生じるとされる状態が、社会的に望ましいとされるある性質を満たさないことを意味する。そこで、まず、この「ジレンマ」を「解消する」というときの、「解消」ということの意味を明確にしておこう。鈴村 [1982] は、Akerlof [1970] が示した「レモン市場」の例、Hardin [1968] らの提示した「共有地の悲劇」の例、Hardin [1973] や Olson [1965] の「公共財供給」の例を挙げた後、以下のように述べる。

> …われわれが…具体的論脈において囚人のデイレンマが示唆する結論に抵抗を覚え、そこに解消されるべきパラドックスの臭いを嗅ぐのは、これらのモデルの定式化が、協力と対立の状況におけるある重要な対立止揚の社会的要因を捕捉しきっていないように思われることに起因しているのではないだろうか。…われわれは、囚人のデイレンマの本来の定式化においては補足されていない社会的対立の止揚要因を取りこみうるように分析のフレームワークを拡大し、新たなフレームワーク内においては各個人の合理的選択結果と協力的社会状態との必然的相克は発生しないことを示そうとするのである。(鈴村 [1982 : 47])

鈴村はこのように述べた後、具体的な解消の

例として、「時間の経過を通じてのプレイヤーの動学的相互作用」を導入しての超ゲーム（無限繰り返しゲーム）解法と、「プレイヤーの戦略選択を他のプレイヤーの戦略選択に依存させる」メタゲーム解法を提示している。

本稿でも、ジレンマの「解消」を上の意味で用いることにしたい。すなわち、理論的モデルによる予測と現実との不一致を、モデルの側の問題として捉え、モデルの前提をより現実に近づけることで、その予測が結果的に現実と合致しそれを説明できるように、理論を修正する、という意味においてである。このとき確認しておきたいことは、この意味での「解消」は、理論の予測を現実に合わせるために、理論をアドホックに変えることを指すのではない、ということである。「解消」とは、（たとえ研究者が個人としてそういう目的を抱いていたとしても、）あくまで提示された論理の上では、もともと現実の近似にすぎないモデルの前提を、より現実的にすることで、そこから演繹される予測が現実に近づくかどうかを試していることを意味するのである(1)。

さて、上に述べたように、この論文は、N人囚人のジレンマの解消を問題としているが、ここでは、完全に一般化した形でのジレンマの解消を求めず、経験的状況に準拠しながら、既存の具体的なモデルの修正という形を通じて、この問題にアプローチしたいとおもう。その理由は、第一に、問題の解消が、経験科学としての社会学の発展につながりうることを確認するためである。ジレンマの「解消」は、その解消ということの解釈が研究者により多様ではあることはあるにしても、極めて多くの人々の興味を引いてきたトピックである。が、これを単なる興味深い知的パズル解きであるとみなすべきではない。上に示した意味での「解消」を考えたとき、この問題はより適切に現実を説明できるよう、理論を発展させるための跳躍台になりうることが理解できるはずである。したがって、どのように現実への説明力が増すかを明確にするために、説明を意図する具体的現実をイメージできるような具体的なモデルを初めから示しておきたいのである。

一般化した形でのジレンマ解消を求めない第二の理由は、やはり「解消」ということの解釈に関わっている。つまり、一般的にジレンマの解消を探究する必要が果たしてあるだろか、ということである。現実は多様で無限であるから、そのうちに解消できないジレンマを内包するような現象が存在したとしても不思議ではない。つまり「解消」を上のように理解したとき、われわれが行うべきことは、囚人のジレンマが<u>常に</u>起こりえないことを示すのではなく、<u>常には</u>起こらないことを示してみせることなのである。したがって、ある特定の現象を対象として、ジレンマの解消をすることには充分に意味があると考えられる。さて、以下に既存の具体的なモデルを提示しよう。

1.2　木村のジレンマ・モデル

木村 [1991] は、「オルソン問題」を定式化する文脈のなかで、ジレンマを抱えた集合行為の１類型を次のようにモデル化している。

> ある地域社会の人々が、お金を出しあって一定の大きさの灯台を建設しようとしている、という場面を考えることにする。灯台の光によって確保される安全は、灯台建設の費用を分担しなかった人も享受できるので非排除性を持つ集合財となる。灯台の光は、ある人が見た分他の人の見る分も減少するということはないので、非競合性を有

する。灯台建設の必要経費は全体として一定で、これを貢献者数で均等割りにして負担するものとしよう。　灯台建設の光から得る利益を B、灯台建設のための総必要経費を K とする。建設に貢献する選択を C、貢献しないという選択を D で表わす。利得関数は（C 選択者の数を m とすると…引用者補足）、

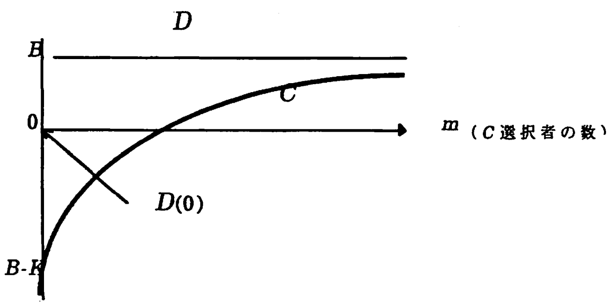
$$C(m+1) = B - K/(m+1), \qquad 0 \le m \le N-1,$$

$$D(m) = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ B. & 1 \le m \le N-1, \end{cases}$$

である。(木村 [1991 : 191])

このように定式化した後、木村は、次のようにさらに、分析を進める。$B \le K$ だとすると、$t(m) = D(m) - C(m+1)$ とおいたとき、すべての m について、$t(m) \ge 0$ となる。ゆえに、他者の選択に関わらず建設に貢献しないことが得になるので、誰も建設に貢献しない事態がナッシュ均衡となる。そして、$D(0) < C(N)$ が成立すれとき、すなわち、$K/N<B$ が成立するとき、$C(m)$ は m の増加関数であるから、ナッシュ均衡がパレート効率的とはならず、「N 人囚人ジレンマ」で表わされる状況となる。

利得関数は次のように図示すると分かりやすいであろう。



いまこれを、N 人囚人のジレンマの具体的に表現されたものの一つとみて、現実の状況にあてはめて考える(2)。皆で金を出し合って灯台を建設するという、いささか寓話的なケース以外の例を考えたいならば、学校設備拡充のための寄付を卒業生に求める、暴力団事務所の立ち退きを付近住民が要求する、あるいは圧政打倒のために蜂起する等の場合に、上のような利得関数があてはまるかもしれない。

1.3　モデルの問題点

さて、このモデルに対して、指摘される可能性のある次の２つの批判・問題点をみておこう。

第一に、Sandler [1992] は、集合行為研究における基本的なテーマのうちの一つとして、非対称的な集団（asymmetric group ：すなわち互いに異質な者の集まり）について触れている。

> …個人の嗜好か賦課物のいずれかあるいは両方における集団の非対称性は、集合的失敗に関連している。
>
> a) 集合行為による利得の分け前がより大きいメンバー（その人々はより大きい賦課物を持っている）は、集合財の供給において不釣り合いな負担に耐えるであろう。“小による大の搾取という組織的な傾向が存在する(Olson 1965, 35)。”
>
> b) 非対称的な集団は、集合行為による利益を得ることが、より容易である。(Sandler [1992 : 8])

個々の命題の詳細な内容はともかく、ここでは、成員間の異質性と集合行為の成否とが深く関係しているであろうことが述べられている。

この指摘を念頭に先のモデルをみたとき、先のモデルは集合行為に関わる者の利得関数を全

て同じものとしているということに気付かされる。むろん、これは現実をモデル化する際に避けることのできない単純化の一つであるが、この単純化はモデルの予測に重大な影響を与えているのではないか、という疑問が生じる。

2番目に、これもモデル化の際の現実の単純化と関係したことであるが、次のような指摘をすることができる。すなわち、上のモデルでは、利益 B、必要経費 K というような客観的に存在するとみられる諸変数により、人々の、行動にあたっての意志（利得関数）が表現されている。が、このような変数だけで利得関数を構成して充分なのであろうか。これは偏向した見方ではないか。たとえ客観的にはそのような状況であっても、我々はこれをその通りに受け取って自分の意志を形づくるとは考えにくい。たとえば我々は、同じ目的を持つ他者に対し連帯感を抱くことができるし、また正しいとされる規範に同調することができるはずである。

Fireman and Gamson [1979=1989] は、よく知られた論文のなかで次のように述べている。

> 集合行為の研究において、功利主義的な仮定と経済学の概念像は利害が所与で具体的・利己的な場合にもっとも有効である。おそらく営利企業は資源動員をこのような条件のもとに行なうだろう。しかし社会運動では動員の可能性は利害、利益を実現する機会および脅威、個人的利益よりも集団の利益を優先させる気持ちなど、変化しやすいものに左右されるのだ。しかし、このような事柄は功利主義的モデルでは全く無視されないまでも、曖昧なままにされがちである。(Fireman and Gamson [1979 : 94])

モデルの例の集合行為も、営利企業における動員より社会運動におけるそれに近いタイプのものとおもわれる。むろん、上の言明に限っていえば、今やよくいわれるように、これは功利主義と利己主義との混同であり（佐藤 [1991]、盛山 [1989] を参照)、連帯感が効用を高めるなら、功利主義的行為者は連帯感を高めるために集合行動を行なうであろうなどと指摘することもできるかもしれない(3)。けれども、先のモデルにあてはめてみるなら、Fireman と Gamson の、この批判は的確なものといえる。利得関数にある K も B も、利己的な意味での個人の利益や損失に違いないからである。そうでなければ、利得関数が上のように表現されることはない。

しかし問題は、集合行為に関係するとおもわれる、利己主義的でない他の変数をさらに増やしていって、利得関数を複雑にしてゆくことが、本当にモデルの予測と説明力を高めることにつながるかどうかである。上のモデルからも分かるように、利己主義に基づく変数からなる利得関数は、それが構成されるときの根拠が理解しやすく、曖昧さが少ないようにおもえる。それ以外の変数を組み入れる場合には、しばしばアドホックな仮定が必要になる。したがって、利己主義的変数以外の変数をどう扱うか、どう処理するかが問題となる。

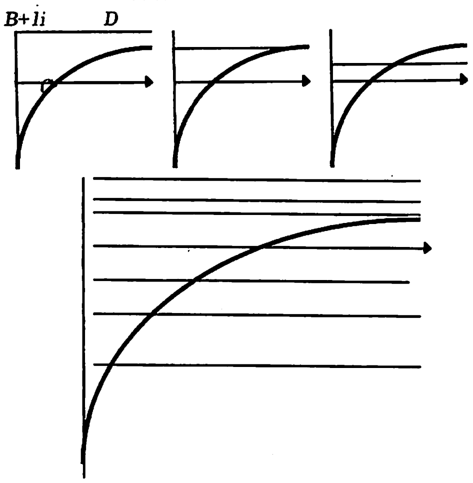
2. 非対称ゲームによるモデル化

囚人のジレンマの解消ということを念頭におきつつ、上に示した2つの批判をモデルの前提を変える契機として捉え、先のモデルを修正した次のモデルを提示する。

（有限の）N人の行為者（$i = 1, 2, 3, \cdots, N$）のそれぞれの利得関数 u_i を、プレイヤーの名を示す i によって決まる l_i をパラメータとした関数として、表現する。

$$u_i\,(m+1, C) = B - K/\,(m+1)$$
$$u_i\,(m, D) = B + l_i$$

このようにして、先に指摘した、同一の利得関数を持つという前提が破られ、非対称ゲームが表現される。この新しいゲームでは、例えば下図のように、プレイヤーそれぞれで、曲線 C と直線 D との関係が異なる。一番下の図は、これら多数のプレイヤーの利得関数を重ねて描き、このゲームの特徴をイメージしたものである。



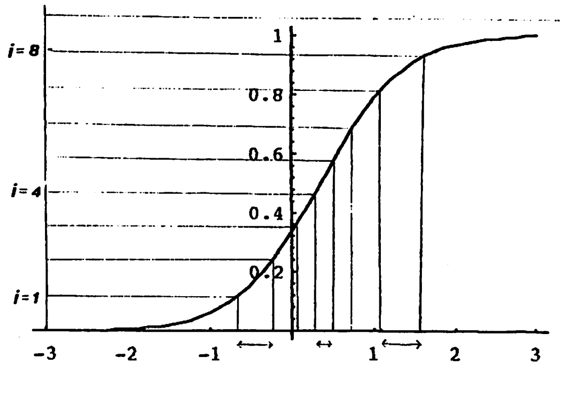
これにより、プレイヤーと同じ数の利得関数の組が一挙に出来上がる。先に述べた成員間に非対称性がある状況をモデル化することができるのである。

もう一つ、「利己主義に基づく変数」以外の変数をどう処理するかという問題がある。これについて次のように考えることを、一つの方法として提案したい。明確に示すことのできる「利己主義に基づく変数」以外の変数、すなわち、利己主義的個人からなるシステムの外部からの影響は、それら変数の種類を詳細に検討するのではなく、逆に、全てまとめて、システム全体に与える一種の撹乱とみなす。利他主義的な考え方も、自分の非協力性によって生じる他者の苦痛をどの程度共有するかによって生じる利得関数の多様性とみることができよう。したがって、プレイヤーの利得関数は、平均的にみれば「利己主義に基づく変数」のみから構成されるのであるが、個々人でバラツキがみられ、しかも全体としては正規分布のような「誤差」がみられるようにモデル化を行う。先に第一の指摘に応える形で、プレイヤーの利得関数を互いに異なるようにしたが、今度は、そのときの「異なり方」を、特定の形のバラツキとなるように操作するのである。

ここでは、「利己主義に基づく利害」で構成される利得関数に近い行為者が多くいる一方で、そこから遠い形の関数を持つ者はわずかであるような分布、ロジスティック分布を利用しよう。

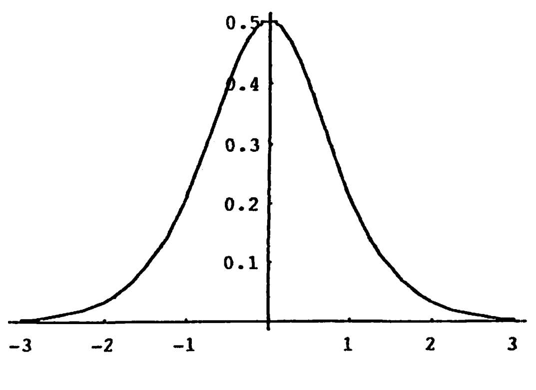
いま、下図右のロジスティック分布から、その累積分布曲線である、左のロジスティック曲

ロジスティック曲線 ($P(x) = \dfrac{1}{1+e^{\beta-\alpha x}}$)



ロジスティック分布 ($p(x) = \dfrac{\alpha e^{\beta-\alpha x}}{(1+e^{\beta-\alpha x})^2}$)

(平均 β/a , 分散 $\pi^2/3a^2$)



線を導く。これを $y=P(x)$ で表現すると、累積分布曲線であるから、それは直線 $y=1$ に漸近する。そこで、グラフの縦軸における $y=1$ を $N+1$ に対応させ、縦軸の0から1までを N に等分割するように $i=1$ から $i=N$ を配する。このとき $y=P(x)$ を利用して、それぞれの i に対応する横軸の値を、「『利己主義に基づく変数』による利得関数」からの「誤差」とすれば、「『利己主義に基づく変数』による利得関数に近い行為者が多くいる一方で、そこから遠い形の関数を持つ者はわずかである」ような多数の利得関数が構成できることは、右の分布との比較で了解できるであろう。(上図では $N=8$ として図が描かれている。)

よって、新しいモデルは次のようになる。

$i=1,2,3,\cdots,N$ について、

$$u_i(m+1,C)=B-K/(m+1)$$

$$u_i(m,D)=B+l_i$$

ただし li は $\dfrac{1}{1+e^{\beta-al_i}}=\dfrac{i}{N+1}$ を満たす

$$(li=-\frac{1}{a}\log(\frac{N+1}{i}-1)$$

ここで $\beta=0$ とし l_i の平均を0とすれば、「客観的な利害」の周りに行為者たちの利得関数が分布することになる。その場合には、このモデルをより単純化して分散を0にすると、冒頭で示した「全員が平均化された利得関数をもつ」木村のモデルになる。

さらに上の数式に、先の図において、D の直線が相対的に最も小さい値にある、名「1」のプレイヤーについて、$u_1(0,D)>u_1(1,C)$、また D の直線が相対的に最も大きい値にある、名「N」のプレイヤーについて、$u_N(N-1,D)>u_N(N,C)$ の条件を加える、これは C 選択者が自分の他に1人もいなくても C を選択するという者はいない一方で、自分以外の全員が C を選択しても D を選択する者は1人は必ず存在するということである。囚人のジレンマモデルを修正したモデルとしての妥当な制約であるとおもわれる。

3. ゲームのナッシュ均衡を求める

3.1 問題

この段階において、再び問題が生じる。いま提示されたゲームは①プレイヤーが離散的な2選択肢をもつ②利得関数がプレイヤー間で異なる(非対称である)③N人(分布を利用することが妥当であるためには N は「多数」でなくてはならない)のゲームであるが、このようなゲームは通常用いられる方法でナッシュ均衡を求めることはできない。例えば、選択肢が連続ではないから効用関数を戦略で微分することはできない。また、先のように $D(m)-C(m)=0$ から展開させたとして導出されるのは恐らく、あるプレイヤー i が選択を変える誘因がないときの、プレイヤーの「名」i と C 選択者数 m との関係を示す式であり、均衡との関連は特に見い出せない。

3.2 定理

ここで以下の定理を利用する。

プレーヤーの集合を $P=\{1,2,\cdots,N\}$ とし、戦略集合を、$\forall i\in P$, $X_i=\{C,D\}$, 戦略プロファイルの集合を $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_N$, 戦略プロファイルを x とする.

さらに、以下を定義する.

1. 任意の $x\in X$ に対して C を選択するプレーヤーの数 :$m(x)=\#\{i\in N|x_i=C\}$.

2. $N-1\geq m(x)\geq 1$ なる任意の $x\in X$ について、ある値 $m, m-1, m+1$(ここでの m は、関数 $m(\cdot)$ とは区別される自然数)におけるプレイヤーの利得関数の形に基づいて、全てのプレイヤーを4分割したときの集合のそれぞれ:

$N-1 \geq m(x) \geq 1$ なる任意の $x \in X$ について,

$$S_1[m]=\{i \in N \mid u_i(m,C) \geq u_i(m-1,D), u_i(m,D) \geq u_i(m+1,C)\}$$
$$S_2[m]=\{i \in N \mid u_i(m,C) < u_i(m-1,D), u_i(m,D) < u_i(m+1,C)\}$$
$$S_3[m]=\{i \in N \mid u_i(m,C) \geq u_i(m-1,D), u_i(m,D) < u_i(m+1,C)\}$$
$$S_4[m]=\{i \in N \mid u_i(m,C) < u_i(m-1,D), u_i(m,D) \geq u_i(m+1,C)\}$$
$$\left(\bigcap_{i=1} S_i[m(x)]=\emptyset,\ \bigcup_{i=1} S_i[m(x)]=N\right)$$

3. x において、S_j に属し、C を選択している S_j に属するプレーヤーの数（$m(x)$ の定義の拡張）：$m(x, S_j) = \#\{i \in S_j(m) \mid x_i = C\}$.

4. x において、S_j に属するプレーヤーの数：$n(x, S_j) = \#S_j(m(x))$.

<u>定理</u>

$N-1 \geq m(x^k) = k \geq 1$ なる任意の x^k（$\in X$）について、

x^k は純粋戦略ナッシュ均衡⇔

$n(x^k, S_2) = 0, n(x^k, S_3) = m(x^k, S_3), m(x^k, S_4) = 0$

(以下にこの定理の厳密な証明を与えるが、十分条件については、直観的には次のように理解することができよう .S_2 に属するプレイヤーは存在せず、S_3 に属するプレイヤーは存在するとすれば全て C を選択し、S_4 に属するプレイヤーは存在するとすれば全て D を選択しているとき、全てのプレイヤーが戦略を変える誘因がないことは、先の S_j の定義から、容易に確認することができる . 同様にして S_1 に属するプレイヤーは、x^k において、C 選択、D 選択に関わらず、戦略を変える誘因はないことも分かる . プレイヤー全体の数は所与であるから、⇔の左の命題を満たされるなら、S_1 に属するプレイヤーの数は一意に決まり、それらの選択肢が何であっても、x^k は純粋戦略ナッシュ均衡となる .)

<u>証明</u>

まず, $m(x)=k$ であるような $x \in X$ がナッシュ均衡であるとは,

$\forall i \in P$,

$x_i=C$ ならば $u_i(k-1, D) \leq u_i(k, C)$

$x_i=D$ ならば $u_i(k, D) \geq u_i(k+1, C)$.

であり,そのときに限る.

(⇒)について.

仮に $i \in S_2(k)$ が存在したとする.ナッシュ均衡の定義から $x_i=C \Rightarrow u_i(k-1, D) < u_i(k, C)$.ゆえに $i \notin S_2(k)$.同様に $x_i=D \Rightarrow u_i(k, D) \geq u_i(k+1, C)$.ゆえに $i \notin S_2(k)$.よって $S_2(k)=\emptyset$.

$i \in S_3(k)$,かつ $x_i=D$ とすると, $S_3(k)$ の条件から $u_i(k, D) < u_i(k+1, C)$ となり均衡ではありえない。$\forall i \in S_3(k)$ に対して, $x_i=C$,つまり $n(x^k,S_3)=m(x^k,S_3)$.

同様に, $i \in S_4(k)$,かつ $x_i=C$ とすると, $S_4(k)$ の条件から $u_i(k, C) < u_i(k-1, D)$ となり均衡ではありえない。$\forall i \in S_4(k)$ に対して, $x_i=D$,つまり $m(x^k,S_3)=0$.

(⇐)について.

$n(x^k,S_2)=0, n(x^k,S_3)=m(x^k,S_3)$ より, $x_i=C \Rightarrow i \in S_1(k) \cup S_3(k)$ となり, $u_i(k, C) \geq u_i(k-1, D)$.また, $n(x^k,S_2)=0, n(x^k,S_3)=m(x^k,S_3), m(x^k,S_4)=0$ より, $x_i=D \Rightarrow i \in S_1(k) \cup S_4(k)$ となり, $u_i(k, D) \geq u_i(k+1, C)$.いずれの場合も任意の i に対してナッシュ均衡であるための条件を満たしている。よって $x \in X$ はナッシュ均衡である。（証明終わり）

3.3　この定理によって、（純粋戦略）ナッシュ均衡は求めることができる。

これを解くと（解を求めるプロセスは補論を参照）、全員が D 選択（非協力）である状態はい

つもナッシュ均衡であるが、その他に、N, K, β, a について、

$$\exists m^* \in \{1, 2, \cdots, N-1\},\quad m^* \le \frac{N+1}{1+e^{\beta - a(-K/m^*)}} (<) \frac{N+1}{1+e^{\beta - a(-K/m^*+1)}} \le m^* + 1$$

が満たされるとき、「$i = 1$ から m^* までのプレイヤーが C を選択しその他のプレイヤーが D を選択する状態」もナッシュ均衡である。

パラドックスの解消という目的に照らせば、「全員が D 選択以外」の後の均衡の存在の有無が問題となる。上の数式は、それぞれの不等式の両辺に m^* が入っているが、残念ながら m^* を他の変数で表現する形には出来ないので、その存在について明確な条件を示すことはできない。が、数値例によって、それが存在しうること（つまり C 選択者のいるナッシュ均衡がありうること）を示すことはできる。より現実的な例を1つ考える中で、数値例を示そう。

例．100の店舗からなるある商店街で、その商店街のアーケードの補修にかかる費用として5000万円が要る、という状況を考える。このとき100店舗から有志を募り、補修費用を有志全員で公平に分担しあうことをあらかじめ申し合わせたとする。上の意味での利得関数のズレの平均 β/a を 0, 分散 $\pi^2/3a^2$ を 6.58 × 106 (a = 5 × 10⁻⁷) として行為者たちの利得関数が適切に表現できたとする。このときどのような結果が生じるか。

$m^* = 31$ としたとき、上の条件式は満たされる。（アーケード補修による利益 B には依存しない。）ゆえに①全員が金を出すことを拒否しアーケードは補修されないか、あるいは② 31の店舗が161万円あまりを出しあうことになるか、のいずれかの事態が生じることが、理論的に予測される。

4　パレート効率性について

次に、この新しい均衡のパレート効率性を吟味する。まず、この均衡が全員が協力である状態とはパレート基準では比較ができない（無差別である）ことはいえる。なぜなら、少なくとも $i = N$ なるプレイヤーについては、新しい均衡では非協力を選択するが、このとき、$u_N(N-1, D) > u_N(N, C)$ の条件より、全員協力の状態よりも必ず利得を増大させる。が、一方で、$u_i(m, C)$（$= C(m)$）を連続な曲線とみたとき、これは m について単調増加となっているから、新しい均衡で協力を選択するプレイヤーは、全員協力の状態よりも必ず利得を減少させる。

では、新しい均衡は全員非協力の状態よりも、パレート基準において、より良いかというと、これは簡単な問題ではない。$C(k) = D(0)(= 0)$ となる $1 \le k \le N-1$ の数 k を考えると、$B - K/k = 0$ より、$k = K/B$ となるので、新しい均衡における協力者数がそれ以上であるとき、全員の利得は0以上となり、パレート基準でより望ましい。逆に、協力者数がそれより小さいとき、協力を選択するプレイヤーの利得は0より小さいが、一方で非協力を選択する $i = N$ なるプレイヤー（利得関数が多様であるときも、当然そのようなプレイヤーは存在しているが）は、新しい均衡ではやはり必ず利得を増大させるので、パレート基準では比較できないことになる。

ところで、m^* についての先の不等式をみれば分かるように、均衡における協力者数 m^* は B には依存しない。k は B が大きいほど小さく

なるので、Bが大きいほど新しい均衡が全員非協力の状態よりパレート基準でよりよくなる可能性が高まるといえる。Bの最大値は、$B \leq K$が仮定されているので、$B = K$であり、このとき$k = 1$となり、新しい均衡は常に全員非協力の状態よりパレートの意味で望ましい。

このゲームにおいて、任意の状態と比較したとき、新しい均衡がパレート優位あるいは比較不可能であるか、つまりパレート最適であるかどうかは、さらに難しい問題となる。答えの出る問題であるかどうかも不明である。

暫定的ではあるが、いままでのことから、次のようにまとめておく。すなわち、新しい均衡は全員協力の状態と比較して無差別であり、同時に全員非協力である場合と比較してパレート劣位にはならない。

5. まとめ

以上、モデルの前提を変えて、より現実的に、行為者の利得関数が異なりうるとし、「全員が非協力」以外の帰結の可能性を導き、同時に新しいタイプのモデルが提示された。 さて、囚人のジレンマの解消という最初の問題意識に立ち返ると、どのようなことがいえるのだろうか。通常、ゲームにおいて、ジレンマとは、ナッシュ均衡がパレート効率的ではないことをいう。この定義に忠実にしたがっていえば、ジレンマを解消したと言い切ることはできない。われわれは非対称性を導入することにより、より単純化されたゲームにおいては存在しなかった、「全員非協力」以外のナッシュ均衡を発見しえた。また、それが「全員非協力」よりもパレート優位でありかつ「全員協力」と無差別であることの可能性も見い出している。しかしそれが、任意の状態と比較してパレート効率的であるかどうかは、確認できていない。

これは、非対称性を導入することにより、(ナッシュ均衡の導出が複雑になっただけでなく)実はゲームに対するパレート基準の適用も困難なものになったためである。したがって、ここに提示されたタイプのゲームによる、ジレンマの解消の可能性をさらに探るためには、今後の課題としては、一般的な形でパレート効率的な状態集合を導くためのアルゴリズムの開発が必要となるであろう。また、今回、ロジスティック分布を利用して利得関数の多様性を表現したが、これを他の分布に替えた場合にジレンマを解消することができるかどうかも、また探究すべき課題として考えられよう。

□補論□　ナッシュ均衡の計算

$i=1,2,3,\cdots,N$ について，

$u_i(m+1,C)=B-K/(m+1)$

$u_i(m,D)=B+li$

ただし $B,K>0$ li は $\dfrac{1}{1+e^{\beta-\alpha li}}=\dfrac{i}{N+1}$ を満たす.

また，$u_1(0,D)>u_1(1,C)$，$u_N(N-1,D)>u_N(N,C)$.

k を $1\leq k\leq N-1$ なる整数として，$m(x)=k$ となる x^k が，このゲームの純粋ナッシュ均衡であるとする.

$u_i(k,C)=B-K/k$，　$u_i(k-1,D)=B+li$

$u_i(k,D)=B+li$，　$u_i(k+1,C)=B-K/(k+1)$

ある i が $S_1(k)$ に属する条件は，$B-K/k\geq B+li$ $\wedge$ $B+li\geq B-K/(k+1)$. これを変形して，$-K/(k+1)\leq li\leq -K/k$. ところが，$-K/(k+1)\geq -K/k$ であるから，li は存在せず，よって i も存在しない. よって，$m(x^k,S_1)=0$.

ある i が $S_2(k)$ に属する条件は，同様にして，$-K/k<li<-K/(k+1)$. よって，

$\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(-K/k)}}<i<\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(-K/k+1)}}$. しかし，$x^k$ がナッシュ均衡であるための必要条件 $n(x^k,S_2)=0$ を満たすので，その必要十分条件は，

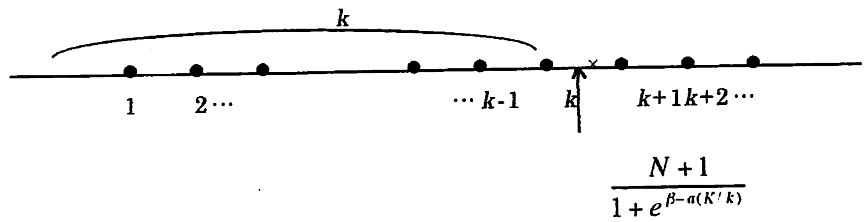
$$\exists k\in\{1,2,\cdots,N-1\},\forall i\in\{1,2,\cdots,N\},\quad i\leq\frac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(-K/k)}}\quad\vee\quad i\geq\frac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(-K/k+1)}}\qquad\cdots①$$

ある i が $S_3(k)$ に属する条件は，先と同様にして，$li\leq -K/k$ $\wedge$ $li<-K/(k+1)$. よって，$li<-K/k$.

ここで，関数 $i=\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha li}}$ は，単調増加であり，$i\geq 1$ であるから，$1\leq i\leq\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(-K/k)}}$. ゆえに，$S_3(k)$ に属すプレイヤーの数は，$\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(-K/k)}}$ で，それに最も近い整数となる.

x^k がナッシュ均衡である条件は，$n(x^k,S_3)=m(x^k,S_3)$，$m(x^k,S_4)=0$，$n(x^k,S_2)=0$ であるが，いま $m(x^k,S_1)=0$，であるから，$k=n(x^k,S_3)$ であればよい. したがって，

$$\exists k\in\{1,2,\cdots,N-1\},\quad k\leq\frac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(-K/k)}}<k+1\qquad\cdots②$$



ここで，①∧② ⇔ $\exists k\in\{1,2,\cdots,N-1\},\quad k\leq\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(-K/k)}}<\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(-K/k+1)}}\leq k+1$

なぜなら；

（←）は自明.

(→)は,背理法で,$[\,k>\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(K/k)}}\Rightarrow\neg①\Rightarrow\neg(①\wedge②)\,]\Leftrightarrow[\,(①\wedge②)\Rightarrow\ k\leq\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(K/k)}}\,]$ …③

同様に, $(①\wedge②)\Rightarrow\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(K/k)}}<k+1$ …④

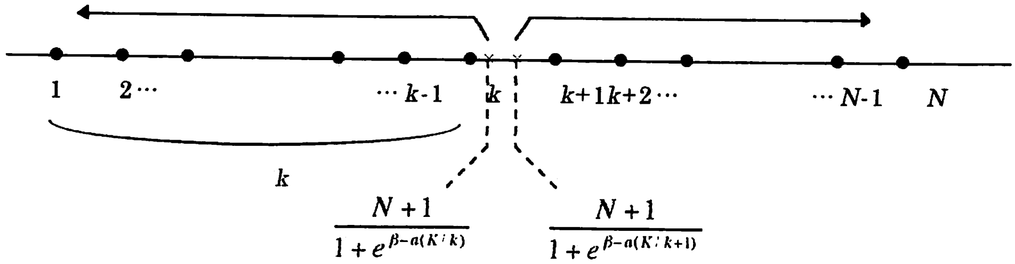
また, $[\,(\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(K/k+1)}}>k+1)\wedge(k\leq\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(K/k)}}<\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(K/k+1)}})\,]$

$\Rightarrow\neg②\Rightarrow\neg(①\wedge②)$

よって, $(①\wedge②)\Rightarrow\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(K/k+1)}}\leq k+1$ …⑤

$\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(K/k)}}<\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(K/k+1)}}$ は明らかだから, ③,④,⑤より,

$(①\wedge②)\Rightarrow\ \exists k\in\{1,2,\cdots,N-1\},\ k\leq\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(-K/k)}}<\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(-K/k+1)}}\leq k+1$



したがって,いままでの条件を満たす整数 k が存在するとき, $n(x^k,S_3)=m(x^k,S_3)$ より, $i=1$ から $i=k$ までのプレイヤーが協力(C)を選択し, $m(x^k,S_4)=0$ より, $i=k+1$ から $i=N$ までのプレイヤーが非協力(D)を選択する状態はナッシュ均衡である.

最後に, $k=0$ の場合と, $k=N$ の場合について検討する。$k=0$ のとき, $u_1(0,D)>u_1(1,C)$ を仮定しているので, $\forall i\in\{1,2,\cdots,N\}, u_1(0,D)>u_1(1,C)$ であり,明らかにナッシュ均衡. $k=N$ のとき, $u_N(N\text{-}1,D)>u_N(N,C)$ を仮定しているので,明らかにナッシュ均衡ではない.

よって,解は,

i) N,K,β,α について, $\exists k\in\{1,2,\cdots,N-1\},\ k\leq\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(-K/k)}}<\dfrac{N+1}{1+e^{\beta-\alpha(-K/k+1)}}\leq k+1$

のとき,ナッシュ均衡は二つ以上存在し,それは,

①全員が非協力の状態

② $i=1$ から上の条件式を満たす k までのプレイヤーが協力し,それ以外のプレイヤーが非協力の状態.

ii) N,K,β,α が上の条件式を満たさないとき,ナッシュ均衡は①のみ.

注

(1) 鈴村の場合は２人囚人のジレンマの解消を考えている。Ｎ人囚人のジレンマに関しては、周知のように、Axelrod [1984=1987] を源流とするシミュレーションを利用した研究の蓄積がある。（これも基本的には繰り返しゲームによる解消を狙ったものである。）ただし本論文では、この流れにそって、モデルの改良を行うという立場にたたない。全く異なる方向からの、ジレンマの解消を考える。

(2) ただし、このモデルの提示は、前後の文脈からみると、現実の社会現象の予測・説明を目指しているというよりは、実際には、オルソンの理論の定式化という意図が主であると読めることをことわっておく。そしてまた、本論文では、モデルに示された「ジレンマ」の、望ましいことが達成されないという含意、つまり現実の社会現象としての問題性を第一義的に考慮しているのではなく、モデルが現実を充分に予測し得ていないという側面に注目しているということを、念のために繰り返しておく。

(3) ただし、Fireman and Gamson [1979=1989] の意図を好意的に探れば、功利主義は、実際上利己主義的人間像に基づくモデルを生みだしており、そして利己主義的な立場から効用となりうる金銭のようなものと、道徳的満足のようなものとを、運動参加にあたっての誘因としては区別する必要があることを訴えているとみることができる。詳しくは、上記文献の「ソフトな選択的誘因」の節を参照せよ。

文献

Akerlof, G.A. 1970 “The Market for ‘Lemons’ :Quality Uncertain and the Market Mechanism”, *Quarety Journal of Economics,* 84 488-500

Axelrod, R. 1984 *The Evolution of Cooperation,* Basic Books Inc., New York=1987 松田裕之『つきあい方の科学』HBJ出版局

Fireman, B, and Gamson, W. A. 1979 *Utilitarian Logic in the Resource Mobilization Perspective,* 8-44 in Mayer N. Zald and John D. McCarthy (eds.), TheDynamic of Social Movements, Massachusetts: Winthrop=1989 牟田和恵「功利主義理論の再検討」(塩原勉(編),『資源動員と組織戦略――運動論の新パラダイム――』93-143 新曜社)

Hardin, G.1968 “The Tragedy of the Commons”, *Sience,* 162 1243-8

Hardin, R. 1971 “Collective Action as an Agreeable n-Prisonersュ Dilemma”, *Behavioral Science.* 16 472-81.

木村邦博 1991 「オルソン問題」(盛山和夫・海野道郎(編)『秩序問題と社会的ジレンマ』ハーベスト社：167-197)

Olson, M. 1965. *The Logic of Collective Action,* Cambridge Massachusetts: Harvard University Press=1957 依田博・森脇俊雅『集合行為論』ミネルヴァ書房

佐藤嘉倫 1991 「社会運動と連帯」盛山和夫・海野道郎(編)『秩序問題と社会的ジレンマ』259-280 ハーベスト社.

Sandler, T. 1992 *Collective Action:Theory and Applications,* University of Michigan Press

盛山和夫 1989 「書評桂木隆夫著『自由と懐疑』」『理論と方法』4(1):168-172.

鈴村興太郎 1982『経済計画理論』筑摩書房

（かみやま　ひでき）